**ДВОЙНОЙ И КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ**

**1.Определение и свойства двойного интеграла.**

К понятию двойного интеграла приводит задача о вычислении объёма тела, заключенного между ограниченной замкнутой областью , лежащей в плоскости , цилиндром, образующие которого проходят через границу области перпендикулярно плоскости , и поверхностью, задаваемой непрерывной в области функцией

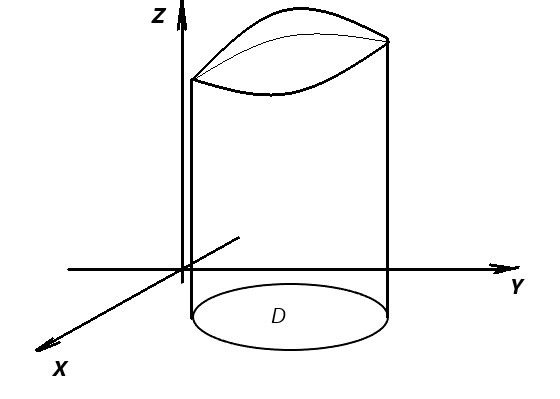
**

Рис. 1.

Разобьём область на объединение непересекающихся областей:

при

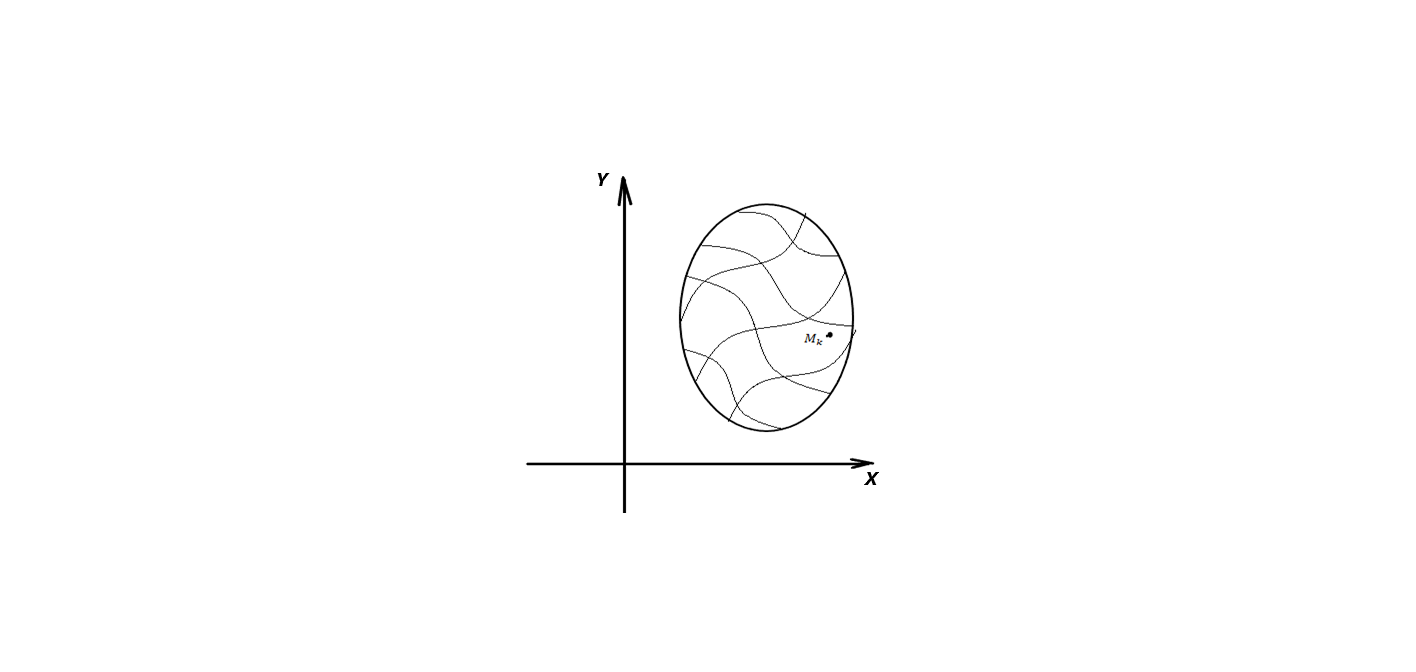


Рис. 2.

Выберем в каждой области по точке:

Обозначим через площадь области , а через diam – диаметр области .

Диаметром области называется расстояние между его двумя максимально удалёнными друг от друга точками.

Очевидно, что при достаточно малых diam сумма

приближённо будет равна объёму (см. определение определённого интеграла). Если максимальный из диаметров diam устремить к нулю, то предел этой суммы будет равен объёму .

**Определение 1.1.** Двойным интегралом называется

,

если этот предел существует и конечен и не зависит от разбиения области и выбора точек

**Теорема 1.1 (существования).** Если функция непрерывна в ограниченной замкнутой области , то существует двойной интеграл

Для определённого интеграла справедливы свойства, аналогичные свойствам определённого интеграла. Приведём их.

1) , где – константа;

3) если то ;

4) если - соответственно наименьшее и наибольшее значения функции в области , – площадь области , то справедливо неравенство

(1.1)

Очевидно, что

Свойства 1) – 4) доказываются аналогично соответствующим свойствам для определённого интеграла.

Свойства 3) и 4) имеют геометрическую интерпретацию, схожую с геометрической интерпретацией соответствующих свойств определённого интеграла.

Аналогично теореме о среднем значении для определённого интеграла с использованием неравенства (1.1) и теоремы Больцано – Коши доказывается

**Теорема 1.2 (о среднем значении).** Если функция непрерывна в ограниченной замкнутой области , то существует такая точка (, что

где - площадь области

**2. Повторный интеграл. Вычисление двойного интеграла.**

**Определение 2.1.** Область называется правильной в направлении оси (оси ), если любая прямая, параллельная оси (оси ), проходящая через внутреннюю точку области , пересекает границу области в двух точках.

Суть состоит в том, что граница области, правильной в направлении оси ,

описывается уравнениями:

.

Граница области, правильной в направлении оси ,

описывается уравнениями:

.

Оказывается, что если область является правильной в направлении оси , то справедливо равенство:

. (2.1)

Если же область является правильной в направлении оси , то

. (2.2)

Интегралы из правых частей равенств (2.1) и (2.2) называются повторными.

Таким образом, в правильных областях вычисление двойных интегралов сводится к вычислению повторных интегралов. Полное строгое доказательство равенств (2.1) и (2.2) мы опустим. Заметим лишь, что для доказательства этих равенств сначала нужно доказать теорему о среднем значении для повторного интеграла. Но мы приведём наглядное геометрическое доказательство для неотрицательной функции

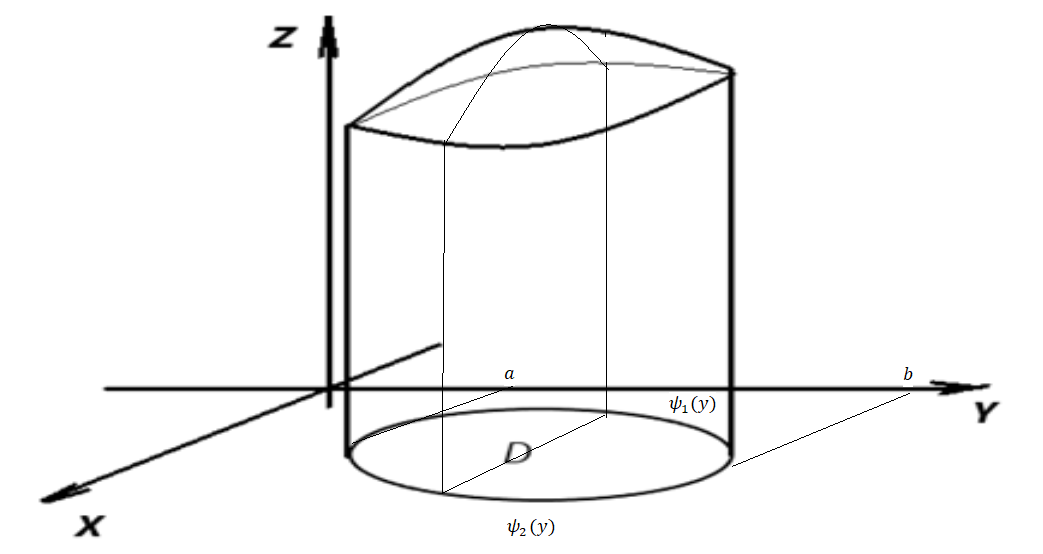


Рис. 3

При фиксированном внутренний интеграл в правой части формулы (2.2) равен площади сечения области плоскостью, проходящей через точку оси . Здесь , как и на рис.1, - область, заключенная между областью , лежащей в плоскости , цилиндром, образующие которого проходят через границу области перпендикулярно плоскости , и поверхностью, задаваемой функцией Если площадь этого сечения умножить на и проинтегрировать по от до , то получим объём области .

Если область не является правильной, её сначала нужно представить в виде объединения непересекающихся правильных областей и воспользоваться свойством 3) двойного интеграла.

Заметим, что повторные интегралы из равенств (2.1) и (2.2) принято ещё записывать в следующем виде:

, (2,3)

. (2.4)

Если повторный интеграл записан в виде левых частей последних равенств, то его вычисление начинается с внутреннего интеграла. Если же он записан в виде правых частей этих равенств, то он вычисляется справа налево.

Полезно помнить следующие правила:

а) пределы внешнего интеграла постоянны;

б) пределы внутреннего интеграла не зависят от его переменной интегрирования;

в) все четыре предела интегрирования постоянны тогда и только тогда, когда область является прямоугольником со сторонами, параллельными осям координат.

**Пример 2.1.** Вычислить интеграл , где область - треугольник с вершинами в точках

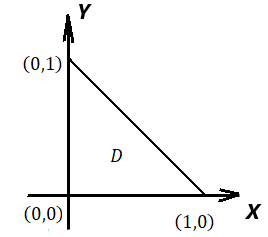
**

Рис. 4.

Область является правильной в направлении обеих осей. В данном случае вычисление интеграла в обоих порядках интегрирования совершенно равнозначно.

Вычислим интеграл сначала в порядке (2.1).

Для вычисления интеграла необходимо иметь уравнение прямой, проходящей через точки

Напомним, что уравнение прямой, проходящей через точки ( и ( имеет вид:

*.* (2.5)

Если (, , то из (2.5) получим:

, откуда

(2.6)

После нахождения уравнения прямой рекомендуется проверить, действительно, проходит ли прямая через указанные точки.

Вычислим интеграл сначала в порядке (2.1). Тогда

Тогда получим:

==.

Поменяем порядок интегрирования. Тогда в (2.2) пределы интегрирования по равны: Теперь в соответствии с правилом б) пределы интегрирования внутреннего интеграла не должны зависеть от переменной . Следовательно, равенство (2.6) нужно разрешить относительно :

Тогда Следовательно,

**Пример 2.2.** Вычислить интеграл , где область –

треугольник с вершинами в точках

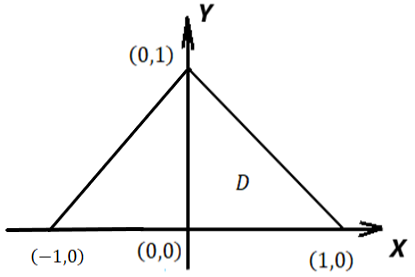


Рис. 5.

Уравнение прямой ( выведено при решении предыдущей задачи. Аналогичным образом можно получить уравнение прямой

Область и в этом примере является правильной в направлении обеих осей.   
Но в данном случае один из порядков интегрирования представляется предпочтительнее. Действительно, если сначала интегрировать по переменной , то при по нужно интегрировать от до (от оси до прямой , а при - от до (от оси до прямой . То есть область нужно разбивать на два треугольника:

, где .

Если же сначала интегрировать по переменной , то для всех интегрирование производится от ( от прямой до прямой .

Приведём оба решения. При этом на этот раз будем использовать обозначения (2,3), (2,4) для ознакомления с последними.

+

*=*

*.*

Вычислим интеграл в другом порядке интегрирования.

=

**Пример 2.3.** Вычислить интеграл , где область –

область, заключённая между линиями .

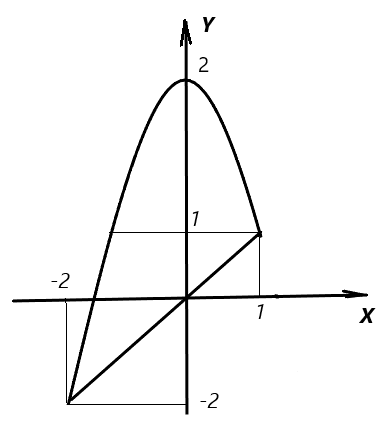
**

Рис.6.

Для того, чтобы вычислить пределы интегрирования по переменной

решим систему уравнений:

.

Область и в этом примере является правильной в направлении обеих осей.   
Но и в данном случае один из порядков интегрирования представляется предпочтительнее. Если сначала интегрировать по переменной , то область нужно разбить на две области, поскольку при по нужно интегрировать от левой ветви параболы до прямой , а при

- от левой ветви параболы до правой ветви параболы

:

Вычисления интеграла в этом порядке интегрирования опустим.

Если же сначала интегрировать по переменной то для всех интеграл по берётся от прямой до параболы . Вычислим интеграл в этом порядке.

*.*

Арифметические вычисления опустим.

**Пример 2.4.** Расставить пределы интегрирования в интеграле , где - область, ограниченная линиями и

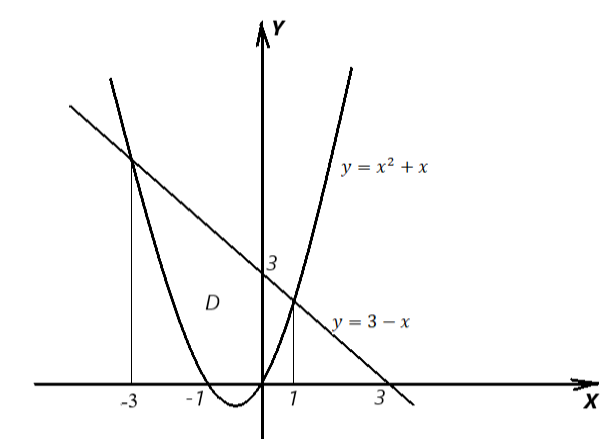


Рис.7.

Очевидно, сначала удобно интегрировать по переменной , а потом по

Для нахождения пределов интегрирования по нужно решить уравнение

Получим: Тогда

. Или, что то же самое,

**3.Двойной интеграл в полярных координатах.**

Зафиксируем на плоскости некоторую точку и назовём её центром. Проведём из центра некоторый луч и назовём его полярной осью. Тогда положение произвольной точки плоскости задаётся однозначно расстоянием от центра до точки и углом между полярной осью и отрезком . При этом угол считается положительным, если отсчитывается

против часовой стрелки и отрицательным, если по часовой стрелке.

Координаты ( называются полярными координатами.

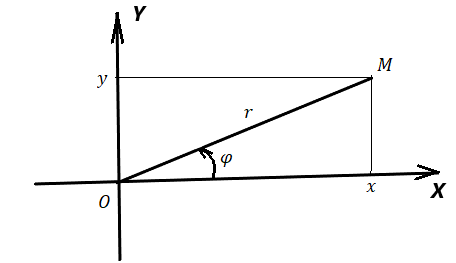
**

Рис. 8.

Если центр совместить с началом декартовых координат, а полярную ось с осью *X* декартовых координат, то связь между полярными и декартовыми координатами задается следующими равенствами:

.

Рассмотрим двойной интеграл

Докажем, что в двойном интеграле при переходе от декартовых координат к полярным справедливо равенство:

Разобьём область на области концентрическими окружностями c центром в начале координат радиусов , , и лучами, исходящими из начала координат и составляющими с осью углы , <, . Положим . Обозначим через площадь области .

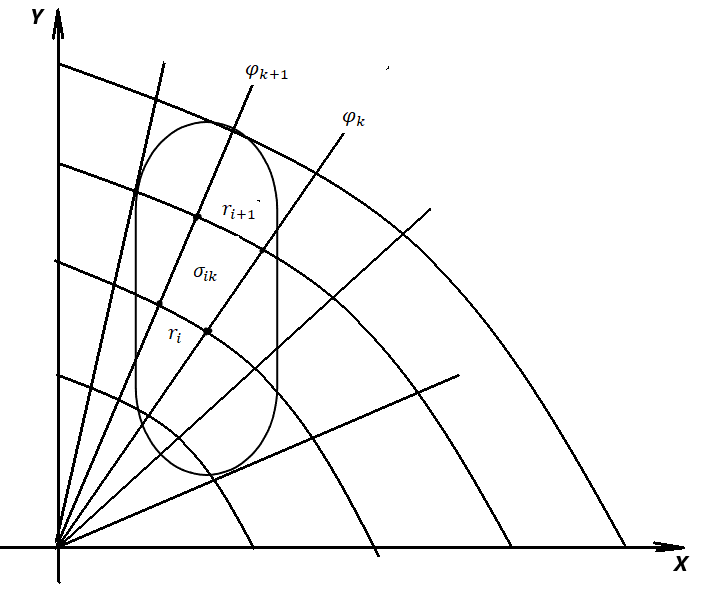


Рис. 9.

Пусть ( – декартовы координаты правого нижнего угла области , указанной на рисунке. То есть , . Тогда сумма

является интегральной суммой интеграла .

Площадь круга радиуса равна . Поскольку в полном угле содержится

2 радиан, то площадь сектора радиуса с углом 1 радиан равна . Но тогда площадь сектора радиуса с углом равна Тогда получим:

==.

Тогда

(3.1)

Но правая часть этого равенства является интегральной суммой интеграла

,

где – та область изменения переменных которой соответствует область изменения переменных при отображении

*.*

Таким образом, устремив и к нулю, из равенства (3.1) получим:

.

К полярным координатам удобно переходить, если область интегрирования или подынтегральная функция обладают центральной симметрией.

Заметим также, что на практике в полярных координатах обычно двойной интеграл сразу записывается в виде повторного интеграла.

**Пример 3.1.** Вычислить интеграл , где область описывается условиями:

Область представляет собой четверть кольца, ограниченной окружностями радиусов, равных 1 и 2, с центром в начале координат и лежащей в третьей четверти.

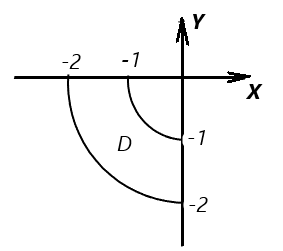


Рис. 10.

.

Очевидно, . Поскольку , то

*=*

*.*

**Пример 3.2.** Вычислить интеграл , где - четверть круга , лежащая в первой четверти.

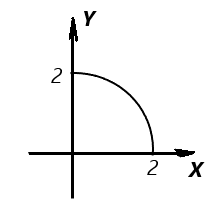


Рис. 11.

Область - четверть круга радиуса 2 с центром в начале координат.

Перейдём к полярным координатам:

. Тогда

===.

**Пример 3.3.** Вычислить интеграл

,

где – область, ограниченная линиями

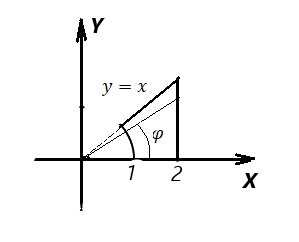
**

Рис. 12.

Перейдём к полярным координатам. В этой задаче верхний предел интегрирования по переменной является переменным. Обозначим его через . Поскольку

*,* то . Тогда

*=*

*==.*

**4.Криволинейный интеграл первого типа.**

Пусть функция непрерывна в области , содержащей непрерывный кусочно-гладкий контур

К понятию криволинейного интеграла первого типа приводит задача о вычислении массы проволоки, имеющей конфигурацию контура линейная плотность вдоль которой описывается функцией .

Линейной плотностью называется масса, приходящаяся на единицу длины.

Обозначим концы контура через Разобьём контур точками

на дуги , . На каждой из дуг выберем по точке

, .

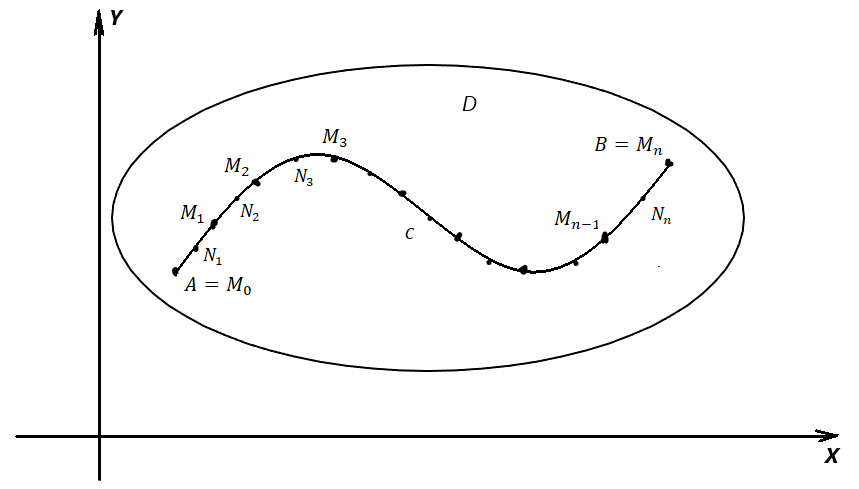


Рис. 13.

Обозначим через длину дуги . Если считать, что вдоль дуги плотность постоянна и равна , то масса дуги приближённо будет равна . Тогда масса всей проволоки будет приближённо равна

.

Чем мельче будет разбиение контура, тем точнее будет вычислена масса проволоки.

**Определение 4.1.** Криволинейным интегралом первого типа

называется

,

если этот предел существует, не зависит от способа разбиения контура точками и от выбора точек

**Замечание 4.1.** Если то равен длине контура

**Теорема 4.1 (существования).** Пусть функция непрерывна в области , содержащей непрерывный кусочно-гладкий контур Тогда существует криволинейный интеграл первого типа

.

Криволинейный интеграл первого типа обладает всеми обычными свойствами интегралов:

1) ;

=;

3) если , то .

Кроме того, справедливо следующее свойство:

4) криволинейный интеграл первого типа не зависит от направления обхода контура

Последнее свойство становится понятным, если вспомнить, что к понятию криволинейного интеграла первого типа приводит задача о вычислении массы проволоки.

Перейдём к вычислению криволинейного интеграла первого типа.

1) Пусть контур задаётся уравнением (:

Тогда

*.*

Не приводя полного доказательства, объясним, почему

Рассмотрим отдельно в увеличенном виде одну из дуг . При этом будем опускать нижние индексы. Пусть координаты точек и соответственно равны () и (), где

*.* При малом длина отрезка приближённо равна длине дуги .

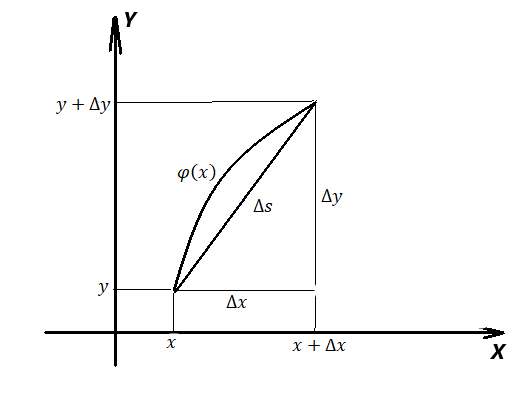


Рис. 14.

Будем считать, что Тогда .

Поскольку то в пределе получим:

2) Пусть . Тогда

3) Пусть контур

. Тогда

Равенство доказывается так же, как и выше:

(. Поскольку , , то в пределе получим:

*.*

**Пример 4.1.** Вычислить интеграл , .

Имеем: , =

Опустим арифметические вычисления.

**Пример 4.2.** Вычислить интеграл ,

.

Имеем: , , ,

I=

=.

Опустим арифметические вычисления.

**Пример 4.3.** Вычислить длину дуги кривой **,** .

Пусть **,** Обозначим длину дуги через . Поскольку , то согласно замечанию 4.1

=.

Опять опустим арифметические вычисления.

**5.Криволинейный интеграл второго типа.**

К понятию криволинейного интеграла второго типа приводит задача о вычислении работы по перемещению материальной точки вдоль некоторого ориентированного кусочно-гладкого контура из точки в точку под действием силы, описываемой непрерывной вектор-функцией .

Напомним, что если сила постоянна, а перемещение прямолинейно, то

работа равна скалярному произведению .

Обозначим концы контура через Разобьём контур точками

на дуги , . На каждой из дуг выберем по точке

, .

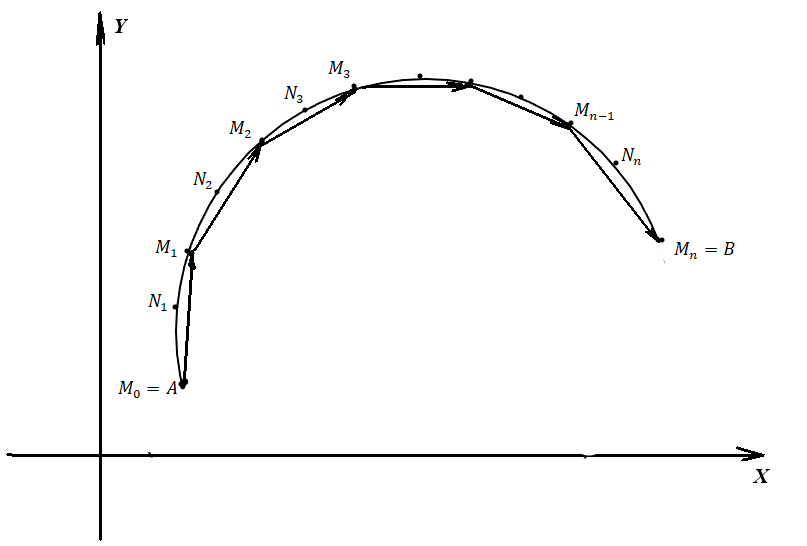
******

Рис. 15.

Введём обозначения:

, .

Заменим перемещение точки по дуге на перемещение вдоль вектора

при этом силу будем считать постоянной и равной

.

Тогда эта работа будет равна ,

и она приближённо равна работе по перемещению точки по дуге под действием силы

Тогда сумма

приближённо равна работе по перемещению материальной точки от точки

до точки вдоль контура под действием силы . Причем это приближение будет тем точнее, чем мельче разбиение контура. Если устремить к нулю наибольший из модулей , то получим точную величину работы.

**Определение 5.1.** Криволинейным интегралом второго типа

= (5.1)

называется предел

если этот предел существует, не зависит от разбиения контура и выбора точек

Криволинейный интеграл (5.1) называется циркуляцией векторного поля вдоль ориентированного контура .

Аналогичным образом определяется циркуляция трёхмерного векторного поля. То есть для вектора :

,

где - ориентированный контур в трёхмерном пространстве,

**Теорема 5.1 (существования).** Пусть вектор-функция

непрерывна в области , содержащей непрерывный кусочно-гладкий контур Тогда существует криволинейный интеграл второго типа

=.

**Замечание 5.1.** Заметим, что сумму, стоящую под знаком интеграла второго типа, не принято заключать в скобки.

Криволинейный интеграл второго типа обладает всеми обычными свойствами интегралов:

1) ;

=;

3) если , то .

Кроме того, справедливо следующее свойство:

4) криволинейный интеграл второго типа меняет знак на противоположный при изменении направления обхода контура

Перейдём к вопросу о вычислении криволинейного интеграла второго типа

1) Пусть контур задаётся уравнением

Заметим, что здесь и ниже не предполагается, что обязательно а имеется в виду, что контур обходится от точки к точке .

Тогда, поскольку то

*.*

2) Пусть контур задаётся уравнением

Тогда, поскольку то

*.*

3) Пусть контур

. Тогда, поскольку *=,*то

*.*

**Пример 5.1.** Вычислить интеграл , где - отрезок параболы , обходимый от точки (1,1) до точки (0,0).

В силу указанного направления обхода контура имеем: : .

Тогда в соответствии с пунктом 1) правила вычисления интегралов (5.1) получим:

*.*

**Пример 5.2.** Вычислить интеграл , где - верхняя полуокружность , обходимая по часовой стрелке.

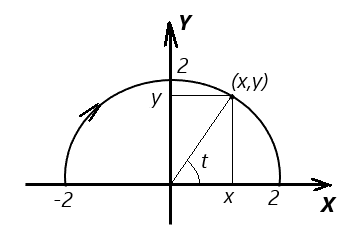


Рис. 16.

Полуокружность , обходимая по часовой стрелке, задаётся параметрически условиями: пробегает значения от до , – угол между осью и радиус-вектором точки на окружности.

Тогда

+2

=

**Пример 5.3.** Вычислить циркуляцию векторного поля вдоль контура , заданного в параметрической форме условиями: , , , меняется от 0 до

Обозначим циркуляцию через .Тогда

Поясним, что последний из трёх интегралов вычислен по формуле интегрирования по частям.

**6.Связь криволинейного интеграла второго типа с двойным интегралом. Формула Грина.**

**Теорема 6.1.** Пусть замкнутая область ограниченная замкнутым кусочно-гладким контуром , является правильной и в направлении оси и в направлении оси Пусть функции и их производные непрерывны в области Тогда

(6.1)

где контур обходится против часовой стрелки.

Формула (6.1) называется формулой Грина. Обозначение используется для интеграла по замкнутому контуру. Можно пользоваться и знаком интеграла без кружочка.

*Доказательство.*

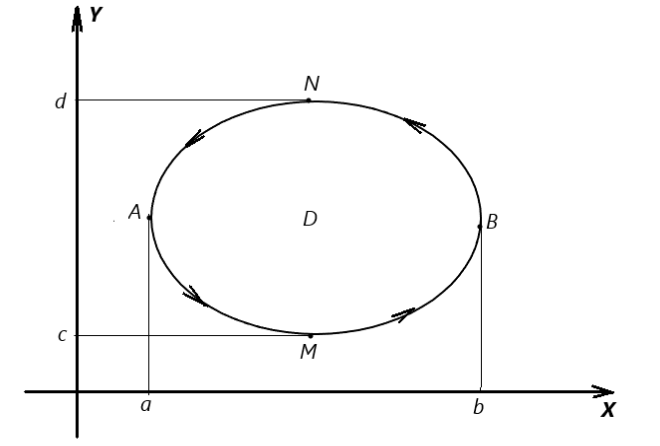
**

Рис. 17.

Поскольку область является правильной в направлении оси , то её границу можно представить в виде:

Функция описывает дугу а функция - дугу .

Тогда получим:

===

===

Поскольку область является также правильной в направлении оси , то её границу можно представить в виде:

Функция описывает дугу а функция - дугу .

Тогда получим:

.

Складывая почленно полученные равенства

*,*

докажем формулу Грина.

**Следствие 5.1.** Формула Грина верна для произвольной области с кусочно-гладкой границей.

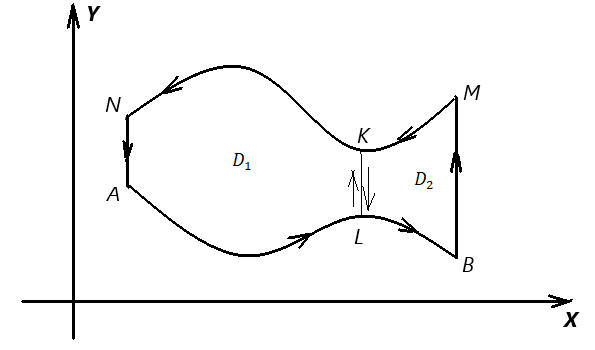
****

Рис. 18.

Для того, чтобы доказать формулу Грина для неправильной области , нужно эту область представить в виде объединения непересекающихся правильных в направлении обеих осей областей, применить формулу Грина в каждой из этих областей, а затем сложить правые и левые части формулы Грина. При этом суммы двойных интегралов будут равны двойному интегралу по области . Сумма криволинейных интегралов тоже будет равна криволинейному интегралу по границе области , поскольку интегралы по тем частям границ, которые являются общими для смежных областей, будут взаимно уничтожаться, так как обходятся в разных направлениях в этих областях. Поясним сказанное примером, приведённом на рисунке.

,

.

=.

Из формулы Грина в качестве следствия вытекает следующая

**Теорема 6.2.** Для того, чтобыкриволинейный интеграл

по любому замкнутому контуру был равен нулю, необходимо и достаточно, чтобы внутри этого контура.

**Доказательство.** 1) Пусть . Тогда по формуле Грина

2) Докажем теорему в другую сторону. Пусть для любого замкнутого контура . Докажем, что тогда . Предположим , что существует такая точка (, что . Для определённости будем предполагать, что Тогда в силу непрерывности функций (условие теоремы 6.1) в некоторой -окрестности точки . Тогда . Но тогда, если

- граница области , то из формулы Грина следует, что

, а это противоречит условию теоремы.

**Пример 6.1.** Вычислить непосредственно ипо формуле Грина интеграл

,

где - граница треугольника с вершинами в точках ,

Граница – обходится против часовой стрелки.

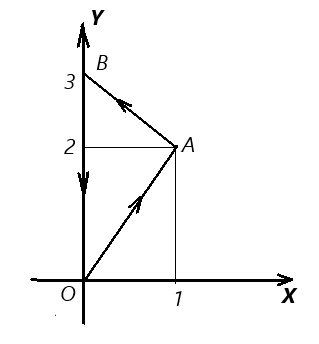


Рис. 19.

Разобьём контур на три контура: , , .

Вычислим криволинейный интеграл по каждому из этих контуров.

Для этого нужно аналитически описать каждый из этих контуров.

Нетрудно получить, что прямая описывается уравнением .

Тогда, с учётом направления обхода контура,

6=3.

Прямая описывается уравнением Тогда, с учётом направления обхода контура,

*== .*

Прямая описывается уравнением Тогда, с учётом обхода контура,

*.*

Тогда

Вычислим теперь интеграл по формуле Грина. Имеем:

.

Тогда

*=*

*=*

Заметим, что равенство очевидно из того, что он равен удвоенной площади треугольника Но полезно упражняться в расстановке пределов интегрирования в двойном интеграле и в его вычислении.

**7.Условие независимости криволинейного интеграла второго типа от пути интегрирования.**

В этом пункте обсудим вопрос о том, когда криволинейный интеграл второго типа не зависит от того, каким контуром соединены начальная и конечная точки контура.

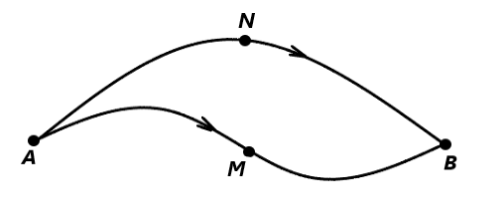


Рис. 20.

По теореме 6.2 для произвольного замкнутого контура (см. рис. 19) равенство справедливо тогда и только тогда, когда . Но тогда и, поскольку

*,* то .

Таким образом, доказано, что при условии интегралы по всем контурам, соединяющим точку с точкой , принимают равные значения.

Равенство и есть условие независимости криволинейного интеграла второго типа от пути интегрирования.

В этом случае оправдано вместо обозначения для криволинейного интеграла применять обозначением , где – соответственно, начало и конец контура .

Оказывается, что в этом случае существует функция , которая называется потенциальной, такая, что

, (7.1)

где

Заметим, что из курса физики известно, что в потенциальном поле работа по перемещению материальной точки из одной точки в другую не зависит от пути её перемещения и равна разности потенциалов в этих точках.

Чтобы имело место утверждение (7.1), нужно, чтобы функция удовлетворяла условиям:

(7.2)

Как из (7.2) следует равенство (7.1), будет показано ниже. А сначала проверим, что условиям (7.2) удовлетворяет функция

, (7.3)

где - произвольная точка из области определения функций и .

Действительно, . Воспользовавшись условием , получим:

Покажем теперь, как из (7.2) следует (7.1).

Пусть - произвольный контур, соединяющий точки и , направленный от первой ко второй, заданный в параметрической форме:

:

Тогда

**Пример 7.1.** Вычислить с помощью потенциальной функции интеграл

.

Имеем: , ;

.Таким образом, условие существования потенциальной функции выполнено.

Построим потенциальную функцию. В качестве точки можно взять точку (0,0). Тогда

*.*

Тогда

**Примерный вариант контрольной работы.**

1.Вычислить интеграл , где – область, ограниченная линиями и

2.Вычислить интеграл непосредственно и по формуле Грина:

, где - треугольник с вершинами (-1,-0),(2,0) и (0,-1), обходимый против часовой стрелки.

3.Вычислить криволинейный интеграл первого типа:

, .

4.Вычислить интеграл в полярных координатах:

, где - область, ограниченная линиями

5.Вычислить интеграл с помощью потенциальной функции:

**Задачи для самостоятельного решения.**

Пусть номер студента по журналу где - число десятков, а -число единиц. 1.Расставить пределы в двойном интеграле , где - область, заключённая между линиями и

2.Вычислить криволинейный интеграл первого типа

,

3.Вычислить криволинейный интеграл второго типа

, от точки (1,1) до точки (0,0).